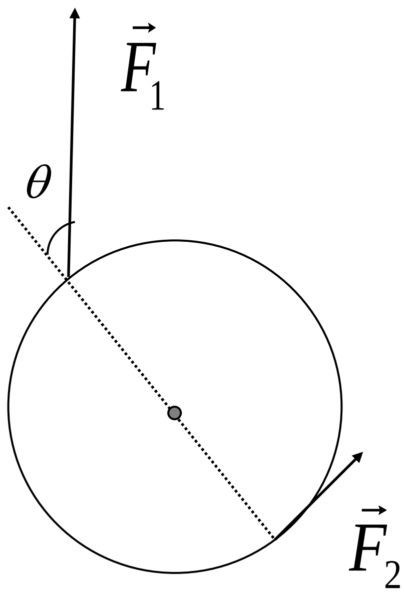
Aula 18

Exercícios sobre rotação e momento angular

Questão 1

Considere um disco cilíndrico de raio *R* e massa *M* que pode rodar livremente em torno do seu eixo, vertical. As duas forças, representadas na figura, são aplicadas no instante $t = 0$, em que o disco está em repouso. Considere os seguintes dados:



$R = 20$ cm, $M = 2{,}0$ kg, $\theta = 30°$ $F_1 = 6{,}0$ N e $F_2 = 2{,}0$ N.

a) Qual é o sentido de rotação do disco?
b) Determine a aceleração angular do disco.
c) Determine a expressão do momento angular do disco em função do tempo.

Nota: O momento de inércia do cilindro em relação ao eixo de rotação referido é $\frac{1}{2}MR^2$, onde M é a massa do cilindro e R é o seu raio.

Resolução

a) Considerando o eixo zz perpendicular ao plano da figura virado para o observador

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \qquad \vec{\tau}_1 = (-0{,}20 \times 6{,}0 \times \sin 30^\circ)\,\vec{k} = -0{,}60\,\vec{k}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \qquad \vec{\tau}_2 = (0{,}20 \times 2{,}0)\,\vec{k} = 0{,}40\,\vec{k}$$

$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -0{,}20\,\vec{k}$ sentido de rotação horário

b) $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ $\qquad \vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\tau}}{I} = \dfrac{-0{,}20}{\frac{1}{2} \times 2 \times 0{,}20^2}\,\vec{k} = -5{,}0\,\vec{k}$ rad/s²

c) $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_0 + \int_0^t \vec{\tau}\, dt$

Para $\vec{\tau}$ constante e disco em repouso no instante t =0, vem: $\vec{L} = \tau\, \vec{k} \int_0^t dt$

$$\vec{L} = \tau\, t\, \vec{k}$$

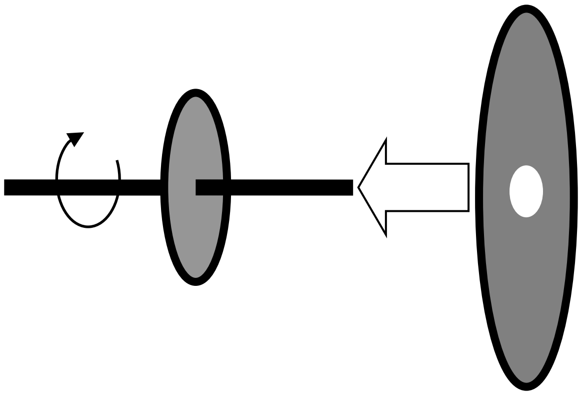
$\vec{L} = (-0{,}20t)\,\vec{k}$ kgm²s⁻¹ ou $\vec{L} = (-0{,}20t)\,\vec{k}$ Nms

Em alternativa, partindo de:

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ com $\vec{\omega} = \alpha\, t\, \vec{k}$, chega-se ao mesmo resultado.

Questão 2

Um disco de massa 10 kg e raio de 20 cm encontra-se a rodar com uma frequência de 800 revoluções por minuto, em torno de um eixo (de momento de inércia desprezável). Um segundo disco de massa 20 kg e raio 30 cm, inicialmente em repouso, é subitamente afixado ao eixo que se encontra a rodar. Determine:



a) O momento de inércia do conjunto formado pelos dois discos relativamente ao eixo representado.
b) A velocidade angular de rotação do eixo quando se coloca o segundo disco.
c) A quantidade de energia cinética perdida quando se coloca o segundo disco.
d) Que força deve ser aplicada ao disco maior para que o sistema se imobilize em 20 s?

a) $$I_{TZ} = I_{D_1 z} + I_{D_2 Z}$$

$$I_{TZ} = I_{D_1 z} + I_{D_2 Z} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = \frac{1}{2}\left(10\times 0{,}2^2 + 20\times 0{,}3^2\right) = 1{,}1\ kg.m^2$$

b) O momento angular é conservado:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \qquad\qquad \omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{I_{D_1 Z}}{I_{D_1 Z} + I_{D_2 Z}}\omega_i$$

$$\omega_i = 2\pi f = 2\pi \times \frac{800}{60} = 83{,}78\ rad.s^{-1}$$

$$I_{D_1 Z} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = \frac{1}{2}\times 10\times 0{,}2^2 = 0{,}2\ kg.m^2$$

$$\omega_f = \frac{0{,}2}{1{,}1} 83{,}78 = 15{,}23\ rad.s^{-1}$$

c) $$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \times 1{,}1 \times 15{,}23^2 - \frac{1}{2} \times 0{,}2 \times 83{,}78^2 = -574{,}33\ J$$

d) A força deve provocar um momento retardador:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \qquad\qquad R_2 F = I\alpha$$

Se F for constante, α é constante, logo:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$F = \frac{I}{R_2}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1{,}1}{0{,}3} \times \frac{15{,}23}{20} = 2{,}79\ N$$

Questão 3

Uma partícula com 2,0 kg de massa executa um movimento circular em sentido directo, de raio R = 5,0 m. O valor do seu momento angular (dado em Nms) relativo ao centro da circunferência varia de acordo com a expressão L = 5,0 t, com t em segundos.

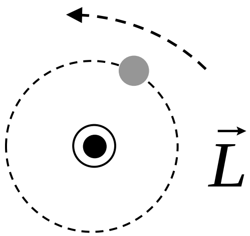
a) Faça um esquema do movimento, assinalando o vector momento angular (pode usar a convenção de que $\odot$ e $\otimes$ representam vectores perpendiculares à figura com o sentido dirigido para e contrário ao observador).

b) Calcule a resultante dos momentos das forças que actuam na partícula, relativos ao centro da circunferência.

c) Calcule a aceleração angular da partícula.

d) Determine a expressão da velocidade angular em função do tempo.

a) O momento angular é perpendicular ao plano da circunferência e aponta para o observador, quando a partícula roda em sentido directo.



b) A resultante dos momentos das forças que actuam na partícula é igual à taxa de variação no tempo do seu momento angular, estando todos os momentos referidos ao mesmo ponto. Então:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{dL}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau = 5{,}0\,\mathrm{Nm}$$

De uma maneira muito indirecta, podia-se de *L*(t) deduzir *v*(t) e a partir daí o valor da força tangencial, calculando depois o seu momento.

c) $$\tau = \frac{dL}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{d(mR^2\omega)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau = mR^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{5}{2\times 25} = 0{,}10\,\mathrm{rad/s}^2$$

Podia-se escrever directamente
$\tau = I\alpha$, com *I*- momento de inércia

d) Como α é constante podemos escrever:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

em que ω_0 é igual a zero, porque o momento angular é zero no instante inicial, como podemos deduzir pela expressão dada. Vem então:

$$\omega = (0{,}10t)\,\mathrm{rad/s}$$